

## « Patron » d'une sphère

Les mathématiciens savent démontrer qu'il n'est pas possible de déplier une sphère à plat (sous-entendu « sans déformation »).

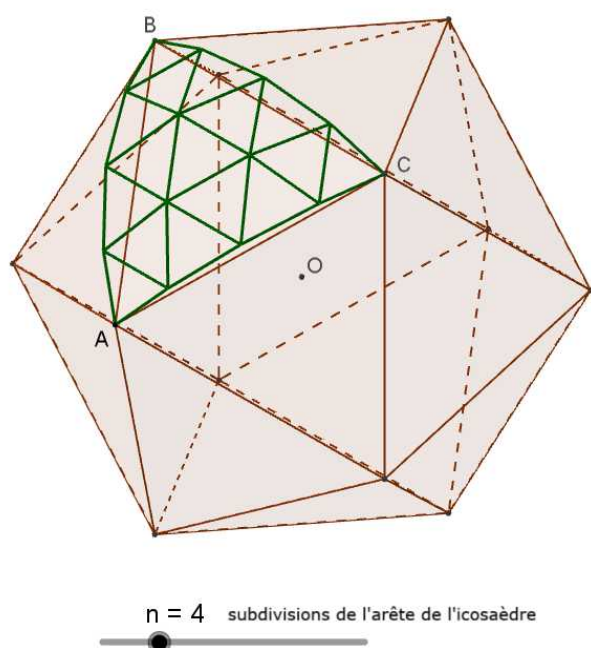
**N.B.** : Ce petit article contient en 1) une partie mathématique et en 2) une partie pratique pour obtenir le tracé du fuseau sur un logiciel de géométrie

Cela soulève notamment certaines questions d'actualités sur la représentation de notre planisphère (cf « Projection de Mercator »), en particulier la mauvaise représentation de la surface de l'Afrique sur ces cartes par rapport aux autres continents.

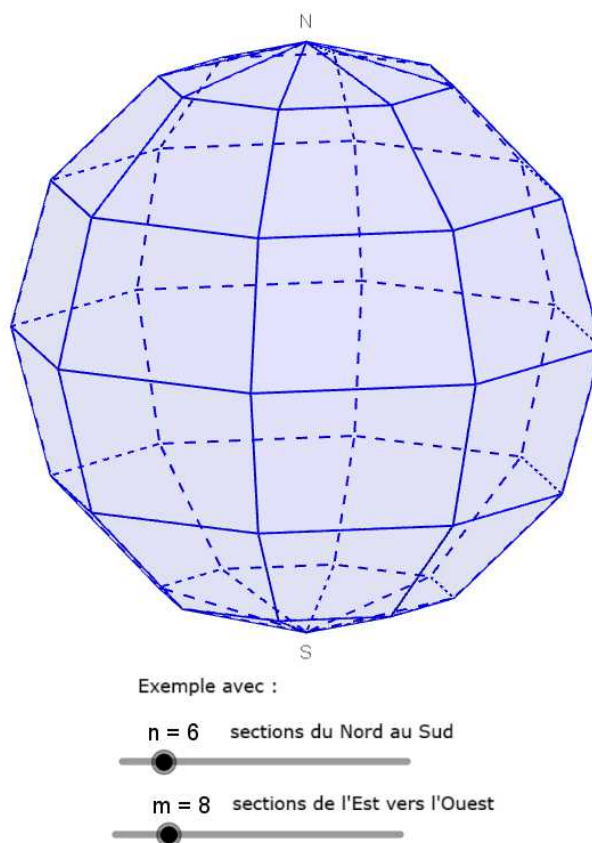
### 1) Quelques méthodes pour obtenir une sphère

Pour résoudre notre problème de couture, nous allons donc utiliser des approximations de la sphère en surface plane. Deux de ces approximations (parmi d'autres) sont assez classiques :

#### Approximation par des triangles (à partir de l'icosaèdre)



#### Approximations par des trapèzes



Retrouver les appliquettes Geogebra pour faire varier et comprendre ces subdivisions :

En triangles : <https://www.geogebra.org/m/gzbt9f6s>

En trapèzes : <https://www.geogebra.org/m/w3gxep2y>

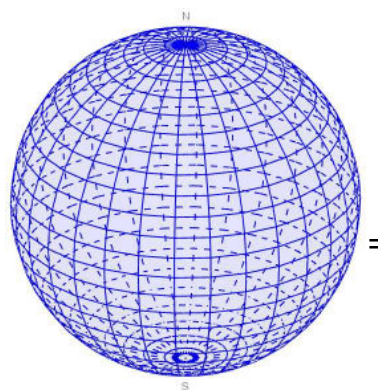
Ces approximations ont l'avantage d'être utilisable en couture, ils sont totalement dépliables à plat sans déformation car ce sont des polyèdres (solides qui possèdent uniquement des faces planes polygonales qu'on peut donc tracer sur une feuille).

Dans la suite de cet article, nous allons uniquement nous concentrer sur la deuxième approximation qui va nous permettre de comprendre comment obtenir l'équation du fuseau utilisé dans le tutoriel de couture du Smogogo en lien ci-dessous.

<https://www.blog-couture-facile.fr/tuto-2-creation-peluche-pokemon-smogogo/>

Cette approximation par des trapèzes s'inspire notamment de notre système de localisation GPS (latitude/longitude) avec les parallèles et les méridiens.

Sur notre approximation, on retrouve cette représentation très proche de la sphère en augmentant fortement le nombre de sections (ci-contre,  $n = 26$ ,  $m = 30$ ).



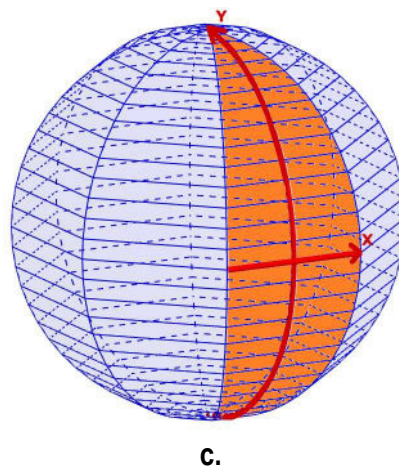
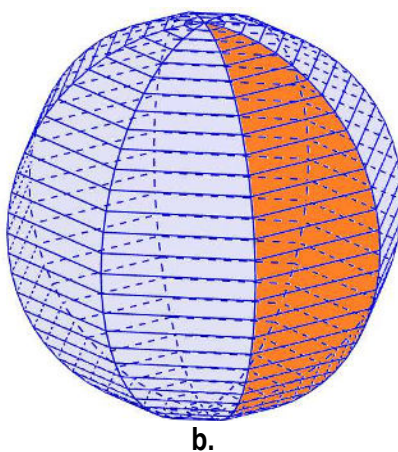
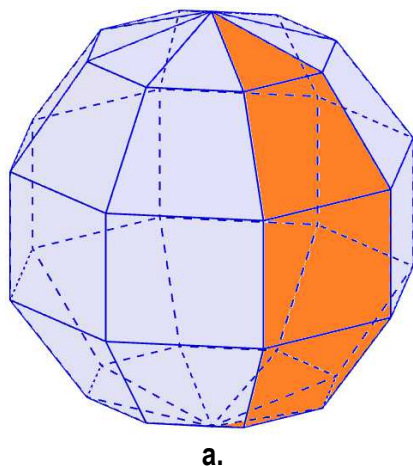
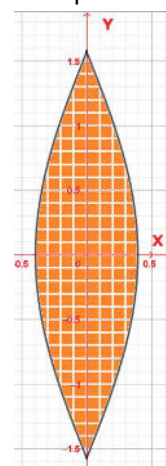
Les fuseaux utilisés dans la fabrication du Smogogo correspondent à cette section orange de la sphère (illustration a. ci-dessous) qu'on répète  $m$  fois d'Est en Ouest, soit autant de fois que l'on aura découpé la sphère.

Dans l'équation du tutoriel

$$X = (\cos(Y/R) \times R \times \pi) / N \quad \text{ou formaté plus scientifiquement} \quad X = \frac{\cos\left(\frac{Y}{R}\right) \times R \times \pi}{N}$$

le nombre  $m$  de l'animation Geogebra correspond au nombre  $N$  dans cette équation.

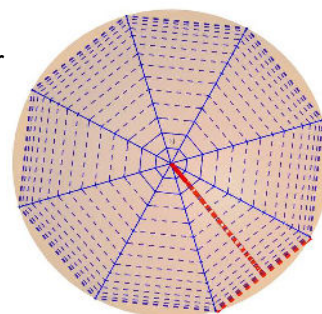
Nous allons dans un premier temps lisser le fuseau orange en augmentant considérablement le nombre de section  $n$  dans l'axe Nord-Sud (figure b.). On se place dans un repère au milieu (c.) de notre fuseau avant de déplier celui-ci.



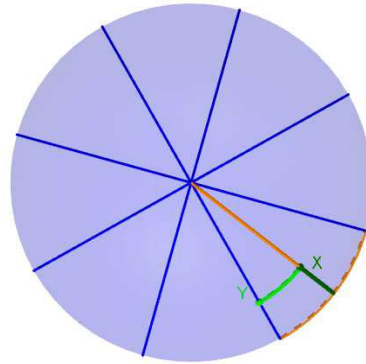
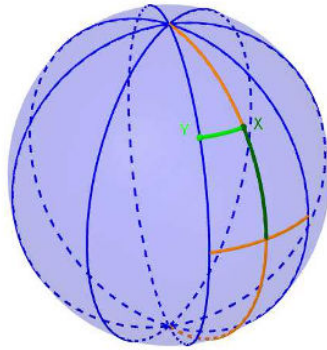
Le problème de cette approximation est qu'elle nécessite des calculs complexes pour trouver une relation entre  $X$  et  $Y$  car l'axe en  $Y$  ne situe pas sur la sphère (vue du haut ci-contre).

Nous allons contourner cette difficulté en nous plaçant quand même sur la sphère dans le modèle suivant mais cela nous donne déjà des idées de la déformation qu'on obtient en fusionnant tous nos fuseaux.

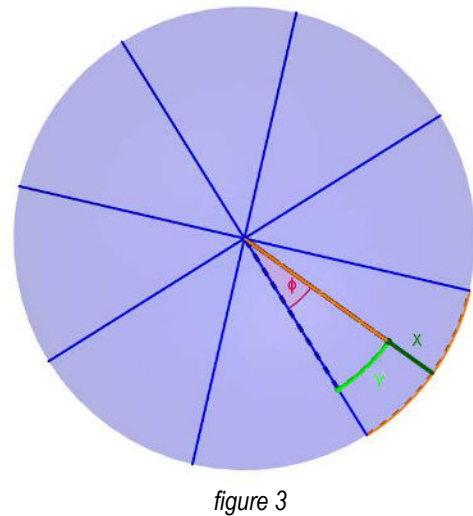
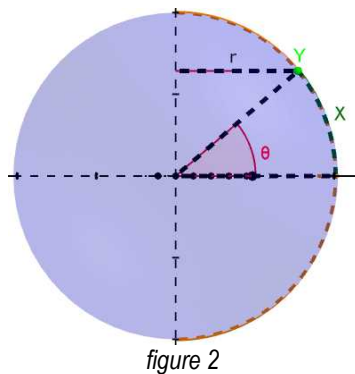
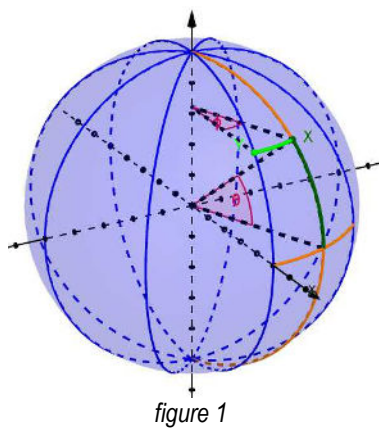
À noter que cette déformation initiale est largement compensé par les déformations même du tissu.



Une fois placé sur la sphère, cela donne ceci :



Plaçons les angles  $\theta$  et  $\phi$  pour commencer les calculs.  
(Niveau : trigonométrie de 3ème + propriété de 1ère)



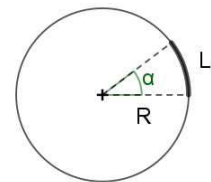
Pour avoir une vue en 3D : <https://www.geogebra.org/m/pn7gk89k>

Bien que la trigonométrie de 3ème (fonction trigonométrique cosinus, sinus, tangente) suffise, ce type d'exercices de géométrie dans l'espace est plutôt traité au lycée.

(Pré-requis admis : notion de radian + propriété suivante)

**Propriété :** On considère un cercle de rayon  $R$  et un angle  $\alpha$  au centre.  
Si l'angle  $\alpha$  est exprimé en radian, alors la longueur  $L$  de l'arc de cercle intercepté l'angle est :

$$L = \alpha R$$



Ce que l'on veut démontrer.

**Propriété :**

L'équation du fuseau recherché est 
$$X = \frac{\cos\left(\frac{Y}{R}\right) \times R \times \pi}{N}$$

**Preuve :** On note **R** le rayon de notre sphère, **r** le rayon intérieur (*figure 2*).

D'après le pré-requis, on a déjà :  $X = \theta \times R$  et  $Y = \varphi \times r$

Sur notre vue du dessus, nous pouvons voir que  $\varphi$  dépend du nombre de sections, c'est la moitié des  $N$  angles formés par les  $N$  sections.

$$\varphi = \frac{2\pi}{N} : 2 = \frac{\pi}{N}$$

et le **Rayon intérieur** est la projection du rayon  $R$  de notre sphère dans le plan contenant l'angle  $\theta$  d'où :

$$r = R \times \cos(\theta)$$

En reportant alors dans  $Y$ , on a :

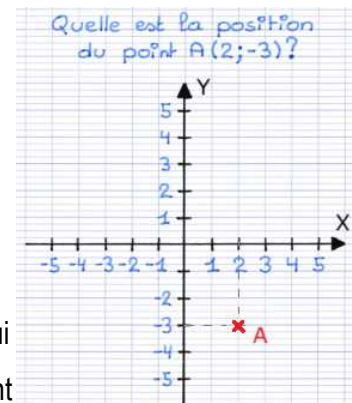
$$\begin{aligned} Y &= \varphi \times r \\ &= \frac{\pi}{N} \times R \times \cos(\theta) \\ &= \frac{\pi}{N} \times R \times \cos\left(\frac{X}{R}\right) \end{aligned}$$

□

## 2) Comment utiliser cette formule pour tracer le fuseau

Commençons par quelques petites précisions pour les non initiés ou rappels pour comprendre comment obtenir la forme du fuseau à l'aide de l'égalité qu'on vient de démontrer.

Pour placer des points dans un repère graphique, nous disposons de coordonnées  $(X ; Y)$  composé de l'abscisse  $X$  et de l'ordonnée  $Y$ .



Cette formule  $X = \frac{\cos\left(\frac{Y}{R}\right) \times R \times \pi}{N}$  décrit en fait la relation (calculatoire) qui existe entre ces deux coordonnées  $X$  et  $Y$ , et qui permet d'obtenir point par point tous les points de la courbe voulue. Cela s'appelle une « équation de courbe ».

Les coordonnées  $(X ; Y)$  deviennent alors  $\left( \frac{\cos\left(\frac{Y}{R}\right) \times R \times \pi}{N} ; Y \right)$ .

En particulier, dans cette formule, c'est l'abscisse  $X$  qui est exprimée en fonction de l'ordonnée  $Y$ .

(N.B. : alors qu'en cours de mathématique au collège, on étudie plutôt l'inverse pour commencer,  $Y$  en fonction de  $X$ .  $y=f(x)$  )

Manuellement, on prendrait valeurs de  $Y$  pour calculer la valeur  $X$  correspondante.

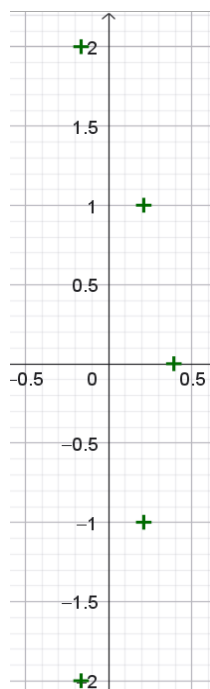
Exemples :

En fixant un rayon  $R = 1$  et le nombre de sections  $N = 8$  (+ Paramétrer votre calculatrice en radians pour les angles.)

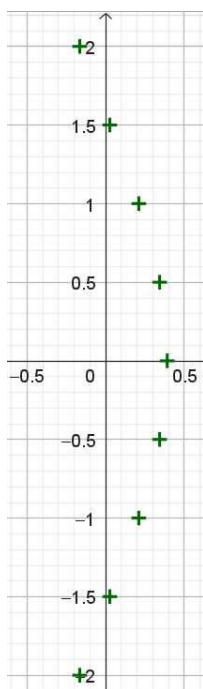
Pour  $Y = 0$ , on aura :  $X = \frac{\cos\left(\frac{0}{1}\right) \times 1 \times \pi}{8} \approx 0,39$  ce qui donne le point de coordonnées  $(0,39 ; 0)$ .

Pour  $Y = 1,5$ , on aura :  $X = \frac{\cos\left(\frac{1,5}{1}\right) \times 1 \times \pi}{8} \approx 0,03$  ce qui donne le point de coordonnées  $(0,03 ; 1,5)$ .

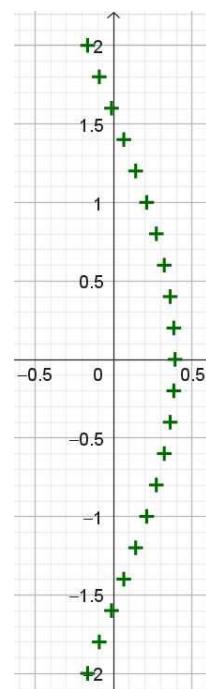
Etc... pour un très grand nombres de points.  
Le placement des points dans le repère donne les résultats ci-dessous.



5 points obtenus avec un pas de 1 entre  
chaque valeur de Y choisi



9 points obtenus avec un pas de 0,5 entre  
chaque valeur de Y choisi



21 points obtenus avec un pas de 0,2  
entre chaque valeur de Y choisi

Bien sûr, nous allons tirer profit d'un ordinateur pour automatiser ce processus.  
C'est ce que font les logiciels de géométrie pour obtenir une courbe lisse avec une infinité de points.

Vous pouvez utiliser par exemple le logiciel gratuit Geogebra, largement utilisé dans l'enseignement pour faire de la géométrie dynamique.

<https://www.geogebra.org/download?lang=fr> (télécharger Geogebra 5 en bas de page)

Il vous suffira alors de rentrer l'équation d'une courbe pour la voir apparaître directement.  
(Attention, les abscisses x et ordonnées y des axes du repère s'écrivent en minuscule sur Geogebra.)

|                                                                                             |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Toujours avec R = 1 et N = 8</p> <p>Saisie: <math>x = \cos(y/1) * 1 * \pi / 8</math></p> | <p>En rajoutant la partie symétrique à la courbe précédente, on obtient tout le fuseau</p> <p>Saisie: <math>x = -\cos(y / 1) * 1 \pi / 8</math></p> | <p>D'autres exemples purement mathématiques :</p> <p>Équation et courbe de la fonction « carrée »</p> <p>Saisie: <math>y = x^2</math></p> <p>Équation et courbe du cercle de centre (0 ;0) et de rayon 1</p> <p>Saisie: <math>x^2 + y^2 = 1</math></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|